Etude proposé par Gérard Gombert (gombertg@live.fr) qui nous écrit :
"Je pense qu'il y a quelque chose d'original dans mon étude, ne serait ce que la simplicité : la factorisation. Je crois, aussi, qu'elle résout le fait que toute suite de Syracuse se termine par 1 ; mais je ne sais pas le formaliser en une démonstration."
Vous pouvez écrire directement à l'auteur si vous avez des idées à lui communiquer.

Version du 09/10/2017

SUITE DE SYRACUSE

Dans cette étude : toute suite de Syracuse de terme initial n_0 est écrite S (2^0n_0), elle se prolonge dans l'ordre croissant $2^1 n_0$; $2^2 n_0$ .... $2^k n_0$ jusqu'à l'infini. La lecture dans l'ordre décroissant conduit sans rupture à n_0 (par application de la règle n pair n/2) départ de S ($2^0 n_0$) « suite classique ». On peut dès lors considérer que toute suite de Syracuse a deux parties, la partie supérieure règlée seulement par n/2 qui est une suite géométrique et la partie post n_0 qui introduit la règle n impair : 3n+1. La seule suite dont la partie supérieure se termine par 1 est la suite S(2^kx1). On n'étudie pas les suites paires qui se ramènent à des suites inférieures déjà connues la suite 4 se ramène à la suite 2 la suite 6 à la suite 3 etc.

À partir de S (2°3) les ruptures introduites par la règle 3n+1 si n impair sont, en nombres, supérieures à une.

À chaque terme de la suite S(2°n_0) étudiée on fait correspondre son terme factorisé par n_0 complété par une somme de facteurs 2^k. Pour toute suite S (2° n_0) on obtient $n_1 = 2^1 n_0 + 2°n_0 + 2°$.

n. (point indiciel) = $2^{k1} n_0 + 2^{k2} n_0$ ....$+2^0$ n0 + $2^{l1} + 2^{l2}$ +.......$+2^{lf}$ k>=0 ; $l_.$ >=0. L'ordre des exposants étant décroissant.

n.=$\sum 2^k + \sum 2^l$ k >=0, l>=0. $\sum 2^k > \sum 2^l$.

$n_.$ = 2°n_0 + 2° donne le plus petit terme factorisable par une somme.

On constate que certains termes de la suite « classique » ne sont pas factorisables, et n'ont donc pas de correspondant.

TABLEAU 1) SYRACUSE $2^k n_0$.

2^kx1	2^kx2	2^kx3	2^kx4	2^kx5	2^kx6	..	..	2^kxn
2^{k-1}x1	2^{k-1}x2	2^{k-1}x3	2^{k-1}x4	2^{k-1}x5	2^{k-1}x6	..	..	2^{k-1}xn
.	.	.	.	.	.	..	..	.
.	.	.	.	.	.	..	..	.
.	.	.	.	.	.	..	..	.
2^2x1	2^2x2	2^2x3	2^2x4	2^2x5	2^2x6	..	..	2^2xn
2^1x1	2^1x2	2^1x3	2^1x4	2^1x5	2^1x6	..	..	2^1xn
n_0=1 S(2^0x1)	n_0=2 S(2^0x2)	n_0=3 S(2^0x3)	n_0=4 S(2^0x4)	n_0=5 S(2^0x5)	n_0=6 S(2^0x6)	..	..	n_0=n S(2^0xn)
4	2	10	Équival ant	16	Équival ant			.
2	1	.	S(2^0x2)	.	S(2^0x3)			.
1	4	.		.				.
	2	.		.				.
	1	.		.				.

S (2°1)

Pour n_0 =1 ; 2 est le plus petit terme factorisable, 2 = 2°1+2°

2^1 appartient à la partie supérieure de la suite, et pour S(2°1) à la partie inférieure.

1 n'est pas factorisable, 1 n'est factorisable par aucune somme.

TABLEAU 2 : S (2°1)

SYRACUSE FACTORISATION

2^kx1	2^kx1
2^{k-1}x1	2^{k-1}x1
2^1.1	2^0x1+2^0
n_0=1 S(2^0x1)	
,$n_{1=}$4	2^1x1+2^0x1+2^0
2	2^0x1+2^0
1	S(2°x1)

S (2°3)

Pour n_0 = 3   4 = 2°3+2° est le dernier terme factorisable par 3.

6 appartient à la partie supérieure de S (2°3) ; c'est le dernier terme avant 3.

6+4 = n_1 =10.

2 n'est pas factorisable ; il est relié à S (2^0 3) par la relation d'équivalence qui existe entre

S (2°4) et S (2°2).

TABLEAU 3) : S (2°3)

SYRACUSE FACTORISATION

2^kx3		2^kx3
2^{k-1}x3		2^{k-1}x3
2^2x3		2^2x3
2^1x3		6
n_0=2 S(2^0x3)		
10=n1	2^1x3+2^0x3+2^0	
5	2^0x3+2^0	
16	2^2x3+2^0x3+2^0	
8	2^1x3++2^1	
4	2^0x3+2^0	4
2	S(2°x2)	
1		

S (2°5)

Pour n_0 = 5 6 = 2°5+2° est le plus petit terme factorisable. Il renvoie par équivalence à S (2°3) inférieure, déjà connue et qui se termine par 1.

8 est factorisable : 8 = 2°5+ 2^1 + 2°, il renvoie à S (2° 4) par 4 qui n'est pas factorisable par 5.

S (2°4) reliée à S(2°8) par équivalence renvoie S(2°5) à 1.

10 appartient à la partie supérieure de S(2°5) par $2^1$5.

6+10 = n_1 = 16.

TABLEAU 4) : S (2°5)

SYRACUSE	FACTORISÉE	Intervalle
2^k x 5		
2^{k-1}x5		
.		
.		
.		
.		
2^1x5		10
n_0 =5 S(2°x5)		8
16	2^1x5+2^2+2^1	6
8	2°x5+2^1+2°	
4	S(2°x4)	
2		
1		

S (2°7)

Pour n_0 =7 n_1 =22 = $2^1 7+2^0 7+2^0$.

On peut à présent calculer l'intervalle par la formule 2^0 n_0 + 1 ; 2 n_0 . Pour n_0=7 :[8 ; 14] dont les termes sont 8 ;10 ;12 ;14.

Somme des termes de l'intervalle : 4 x (8+14) /2 = 44

Les termes de l'intervalle forment une progression arithmétique de raison 2.

8+14= n1 = 22 ; 8+12+14= 34 ; 14+12 =26 ; 44+8 = 52

8 = 2°7+2° est le plus petit terme factorisable il renvoie à S (2°4).

10 renvoie à S (2°5) déjà connue. 12 renvoie à S (2°3) déjà connue.

14 renvoie à 2^1 7 de la partie supérieure de S (2°7).

TABLEAU 5) : SYRACUSE S (2°7)

SYRACUSE	FACTORISÉE	Intervalle
2^kx7		2^kx7
2^{k-1}x7		2^{k-1}x7
.		.
.		.
2^2x7		2^2x7
2^1x7		14
n_0=7 S(2^0x7)		n_0=7 S(2^0x7)
22	2^1x7+2^0x7+2^0	12
11	2^0x7+2^2	10
34	2^2x7+2^2+2^1	8
17	2^1x7 +2^1+2^0	
52	2^2x 7+2^1x7+2^0x7+2^1+2^0	
26	2^1x7+ 2^0x7+2^2+2^0	
13	2^0x 7+2^2+2^1	
40	2^2x7 +2^0x7+2^2+2^0	
20	2^1x7+2^2+2^1	
10	2^0x7+ 2^1+2^0	
5		
16	2^1x7+2^1	
8	$2^0$7+2^0	
4	S(2°x4)	
2		
1		

TABLEAU 6) CONTINUITÉ DES INTERVALLES.

Présentons à présent par un nouveau tableau les suites, dans l'ordre croissant avec leur intervalle .X2k n0	…..		… ..		… .		… .		… ..			....			… .			....		
21n0	2		6		10		14		18			30			42			54		

n0 = S(2°n0)= 1	1	3	3	5	5	7	7	9	9		15	15	....	21	21	......	27	27	....	31
n1=4	4		10		16		22		28	......		46	......		64	.....		82	...	
	2		5		8		11		14	.....		23	......		32	......		41	....	
2	1	4	16		4		34		7	.....		70	.....		16	.....		124	....	
		6	8	6	2		17		22	.....		35	.....		8	......		62	....	
			4	8	1	8	52		11	.....		106	.....		4	.....		31	....	
			2	10		10	26	10	34	.....		53	.....		2	.....		94	....	
			1			12	13	12	17	....		160	.....		1	.....		47	....	
						14	40	14	52	....		80	.....			.....		142	....	
							20	16	26	....	16	40	.....			.....		71	....	
							10	18	13	...	18	20	.....			.....		214	....	
							5		40	...	20	10	.....			.....		107	....	
							16		20	...	22	5	.....	22		.....		322	....	
							8		10	.....	24	16	.....	24		.....		161	....	
							4		5	....	26	8	.....	26		.....		484	....	
							2		16	....	28	4	.....	28		.....		242	....	
							1		8	....	30	2	.....	30		.....	30	121	....	
									4	.....		1	......	32		....	32	364	....	32
									2	....				34			34		....	34
									1	....				36			36		....	36
										.....				38			38	263	....	38
														40			40	790	....	40
														42			42		....	42
																	44		.....	44
																	4	46		4

																	6			6
																	48	23		48
																	50	.		50
																	52	.		52
																	54	1		54
																				56
																				58
																				60
																				62

S (2°27)

Intervalle [28 ;54] termes de l'intervalle : 28 ;30 ;32 ;34 ;36 ;38 ;40 ;42 ;44 ;46 ;48 ;50 ;52 ;54

28 = 2°27+2° plus petit terme factorisable, renvoie à S (2°3).

30 renvoie à S(2°15) ;32 renvoie à 2^k 1 et à 1 ; 34 renvoie à S(2°17) ; 36 renvoie à S(2°9) ; 38 renvoie à S(2°19) ; 40 renvoie à S(2°20) ; 42 renvoie à S(2°21) ; 44 renvoie à S(2°11) ; 46 renvoie à S(2°23) et appartient à la suite « classique » en tant que dernier terme factorisable ; 48 renvoie à

S(2°3) ; 50 renvoie à S(2°25) ; 52 renvoie à S(2°13) ; 54 renvoie à $2^1$27 partie supérieure de S(2°27).

La somme des termes de l'intervalle est 574.n_1 =28+54 =82 ; 124 =34+44+46 ; 62=30+32 ; 94=50+44.

2^kx27		
2^{k-1}x27		
.		
2^1x27		n_{14f}=2°27°+2° +2^4+2^3+2^1=54
S(2°x27)		n13f=2°x27+2°+2^4+2^3=52
82	2^1x27+2°27+2°	n_{12f}=2°x27+2°+2^4+2^2+2^1=50
41	2°x27+2^3+2^2+2^1	n_{11f}=2°x27+2°+2^4+2^2 =48
124	2^2x27+2^4	n_{10f}=2°x27+2°+2^4+2^1 =46
62	2^1x27+2^3	n_{9f}=2°x27+2°+2^4 =44
31	2°X27+2^2	n_{8f}=2°x27+2°+2^3+2^2+2^1=42
.		n_{7f}=2°x27+2°+2^3+2^2=40
.		n_{6f} = 2°x27+2°+2^3+2^1=38

.		n_{5f}= $2°x27+2°+2^3=36$
.		$n_{4f}=2°x27+2°+2^2+2^1=34$
.		$n_{3f}=2°x27+2°+2^2=32$
.		$n_{2f}=2°x27+2°+2^1=30$
46		$n1_f$= $2°x27+2°=28$
23		
70		
35		
106		
160		
40		
20		
10		
5		
16		
1		

CONCLUSION

Ce traitement de la suite de SYRACUSE par factorisation et intervalle propre à chaque suite $S(2°n_0)$ met en évidence que chaque suite peut-être réliée à une suite inférieure dont on sait déjà qu’elle se termine par 1.

Donc toute suite de Syracuse se termine par 1, il n’existe pas de suites divergentes, ni de suites circulaires On peut aussi considérer que 1 n’étant factorisable par aucune somme il est commun à toutes les suites comme terme non factorisable.